

主动极限位移规律与主动土压力计算公式探讨

李超¹, 卫龙武²

(1. 佛山市顺德区碧桂园物业发展有限公司, 广东 佛山 528312; 2. 江苏东大特种基础工程有限公司, 南京 210008)

摘要: 针对基坑支护结构的工作特点和土体的具体情况, 对朗肯土压理论的合理性和局限性进行了有益探讨, 指出朗肯土压理论在支护结构土压力计算上的不足。在支护结构墙后土体化分为3个分区的基础上, 以土体达到朗肯主动极限平衡状态时为例, 得出墙后土体极限水平变位随土层深度呈抛物线形变化的规律。结合工程实际情况, 提出了在小变位条件下考虑墙位位移、开挖深度和嵌固深度影响的朗肯主动土压力计算公式。

关键词: 土压力; 极限位移; 支护结构; 小变位

中图分类号: TU 411.3

文献标识码: A

Rule of active limiting displacement and calculation method of active earth pressure

LI Chao¹, WEI Long-wu²

(1. Foshan Shunde Country Garden Property Development Co., Ltd, Foshan 528312, China;

2. Jiangsu Dongda Special Foundation Engineering Co., Ltd., Nanjing 210008, China)

Abstract: Aiming at the rationality and limitation of the Rankine earth pressure theory to the characteristics of bracing for foundation pits and the specific soil conditions, the discussions are carried on. And the insufficiencies in the calculation method of bracing for foundation pits are pointed out. Taking the active limiting equilibrium condition of retained soil stress for example, the rule that the active limiting horizontal displacement along with the depth of retained soil accords with parabolic equation base on the earth deformation regions in foundation excavation is obtained. According to the need in the project, considering the effect of wall displacement, depth of excavation and embedded depth on the calculation method of the Rankine active earth pressure is proposed, under the small displacement condition.

Key words: earth pressure; limiting displacement; bracing for foundation pits; small displacement

1 引言

经典土压力理论包括朗肯土压理论和库仑土压理论, 它们提供的土压力计算方法建立在土体的极限平衡理论基础之上。由于计算公式简单实用, 这两种土压力理论得到了广泛的应用。然而, 对于现在的支护结构来说, 这种理论前提是不能接受的, 土体要想达到极限平衡状态, 尤其要达到被动极限平衡状态, 其相应的位移往往是支护结构所不能容许的。支护结构所受的土压力和位移有怎样的关系, 处于非极限状态时对应的非极限土压力如何计算, 成为广大工程师所关心的问题。本文结合土压

力变化的一般规律与影响因素, 讨论了朗肯土压力理论的局限性, 推导基坑支护结构偏离土体方向使土体达到主动极限平衡状态时土体主动极限位移变化规律, 并提出一种考虑位移影响的主动土压力计算公式。

2 朗肯土压力计算理论的局限性

2.1 土压力理论的理论前提

朗肯土压理论基于摩尔-库仑强度理论, 考虑墙后微分单元土体一点的应力状态来确定主、被动土压力的大小。当支挡墙体在外力和填土压力作用下产生背离或面向填土方向的位移和变形, 使得该

点的应力圆与摩尔-库仑强度线相切达到极限平衡状态, 此时的土压力就称为主动或被动土压力, 该点所处的平面称为破坏面或滑动面, 如图 1 所示。

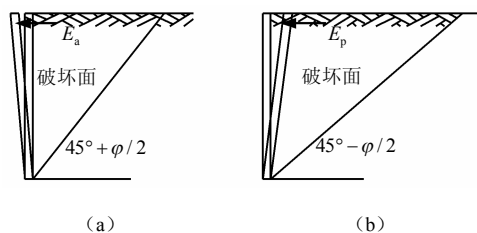


图 1 主、被动土压力示意图

Fig.1 Sketch of different earth pressures

根据极限平衡理论, 朗肯土压力所计算的是墙后土体每点都达到极限状态时的土压力, 但实际情况并非如此, 土压力的大小与挡土墙的位移和变形有直接关系。位移和变形方式与大小的不同, 可导致墙后土体从上到下并未全部达到极限状态, 相应的变位土压力不是呈三角形分布, 而是下端略有缩小^[1]。图 1 并不能说明土压力的发展过程, 墙后土体从弹性状态逐渐过渡到主动极限平衡状态或被动极限平衡状态。它是从一点开始, 最后扩展到整体的一个逐渐破坏的渐变过程, 而并非一点的破坏。墙后土体破坏面的形成也是一个渐变过程, 对支护结构墙后土体可以分为 3 个区: 塑性区、弹性区和不变形区^[2-3], 墙后土体破坏面的形成过程非常复杂, 同时各种假定前提也限制了朗肯土压理论的适用范围。虽然后来许多学者经过研究扩展了朗肯土压理论的应用范围, 但还是与实际工程有出入。

2.2 土压力理论中的变位问题

朗肯主、被动土压力的产生主要是因为挡土墙的侧移, 当位移和变形达到一定数值后土体才会出现滑裂面, 最终达到主、被动极限状态。极限状态变形量具体数值见表 1^[4]。

一般认为, 达到主动土压力时的位移量为 $(-0.001 \sim -0.003)H$, 而达到被动土压力的位移量为 $(0.02 \sim 0.05)H$ ^[5]。支护结构的容许侧向变位取决于 2 个因素: 一是围护结构自身的容许变位, 另一个是围护的保护对象对围护结构变形的限制。由于围护结构变形引起周围地面沉降的控制很严格, 在市区进行建设, 限制地表沉降或桩的水平位移在 30 mm 左右是恰当的。如果将这一数值与主、被动极限平衡状态下土体的可能位移相比, 不难看出主动极限平衡状态尚属勉强允许, 出现被动极限平衡状态的位移就很难令人接受, 这是经典土压力理论的缺陷^[6]。

表 1 主、被动土压力对应位移量
Table 1 Displacements according to different earth pressures

土体类别	移动形式	主动极限状态所需位移量 /mm	被动极限状态所需位移量 /mm	备注
密实砂	平移	0.001H	0.05H	Terzaghi
	绕低端偏转	0.001H	>0.1H	(1934 年)
粉砂	平移	(0.006~0.008)H		Matsuo et al.
矿渣		(0.001~0.003)H		(1978 年)
生石灰矿渣	绕低端偏转	(0.0009~0.001)H	>0.3H	Kno et al.
				(1992 年)
密实砂	平移	0.004H	0.14H	Ishihara et al.
				(1995 年)
黏土	平移	0.004H		Tien Hsing Wu.
	绕低端偏转	0.004H		(Soil Mechanics)
黏质粉土	平移	约 0.004H		杨斌, 胡立强
砂土	平移	约 0.004H		(1999 年)

注: 表中 H 为挡土结构高度^[4]。

2.3 朗肯土压理论悖谬之处^[6]

一般土压力可以表示为

$$E = \gamma h^2 k / 2 \quad (1)$$

式中: K 为土压力系数。对既定的挡土结构, γ 及 h 为常数, E 大小的变化与 K 的变化相一致, 规律性的现象是: $E_0 > E_a$, 而朗肯土压理论是由土的强度指标来推算 K 的。对软土地层, 由于透水性低且基坑开挖的速度快, 强度指标应采用不排水剪, 即 $\varphi_u = 0$, 对福州平原近似有 $c_u = 10 \sim 15$ kPa, 这导致两个结果: 一个是 $K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi/2) = 1.0$, 而根据实测结果与试验数据 $K_0 = 0.68 \sim 0.72$, 故当基坑开挖到一定深度后必定出现 $E_0 < E_a$ 的情况, 这是朗肯理论的悖谬之一。

按照朗肯理论, 当 $\varphi_u = 0$ 时, $K_p = K_a = 1.0$, 围护结构两侧主、被动土压力则有

$$\sigma_a = \gamma z - 2c; \quad \sigma_p = \gamma(z - h) + 2c \quad (2)$$

式中: h 为坑深。出现 $\sigma_a > \sigma_p$ 的条件是 $h \geq 4c/\gamma$, 这意味着在坑深超过 $h \geq 4c/\gamma$ 时, 对悬臂围护结构无论打入多深, 刚度多大, 都无法稳定, 这显然是违背实际的, 这是朗肯土压理论的悖谬之二。

3 极限平衡状态土体水平变位规律

如果按照极限平衡理论, 即墙后土体每一点都达到极限状态, 并假设支护结构随土体变形的过程中不影响土体变形的理想状态, 那么土体达到主动极限平衡时的主动极限位移变化规律如何。本文结合文献[2, 3]提出的墙后土体区域划分规律, 对此

进行了分析。

目前基坑支护中土压力的计算一般按平面应变问题考虑, 据试验研究随着支护结构的位移和变位, 土压力和位移量或水平应变之间符合双曲线关系^[7-8]。本文在假定土压力与水平应变的线性变化关系基础上, 推求达到朗肯极限平衡状态时土体的最终水平位移规律:

$$\Delta p = k_0 \sigma_z - \sigma_x = EL_a \varepsilon_x \quad (3)$$

式中: Δp 为压力差降; $k_0 \sigma_z$ 为静止土压力; σ_x 为土压力; E 为土体变形模量; L_a 为线性修正系数。

由于土体初始状态和最终状态相同, 引进线性修正系数 L_a 把非线性过程简化为线性过程并不影响最后结果, 不会改变土体的极限位移规律。

Caspe 等^[2,3]在研究围护桩墙的侧向变形和基坑地表沉陷之间的关系时, 将围护桩墙后土体分为塑性平衡区 (A 区)、弹性平衡区 (B 区)、未受扰动区 (C 区) 3 个区, 如图 2 所示, 其中塑性平衡区各点的水平应变相等为 ε_A , 弹性平衡区各点的水平应变 ε_B 随 x 增加而线性减小^[3], 即

$$\varepsilon_B = \varepsilon_A [1 - (x - L_1) / L_2], \quad L_1 < x < L_1 + L_2 \quad (4)$$

式中: x 为地表任意一点到围护墙边的距离; L_1 为 A 区土体的长度; L_2 为 B 区土体的长度, 而未受扰动区各点的水平应变 $\varepsilon_c = 0$ 。

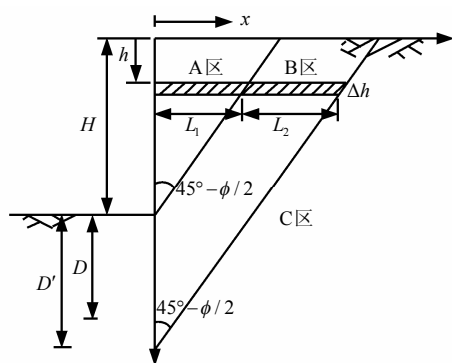


图 2 土体变形分区图

Fig.2 Sketch of deformation in excavation

以主动区为例进行分析。设距地表为 h 深度处围护桩墙的位移为 s ^[3], 则有

$$\int_0^{L_1} \varepsilon_A dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \varepsilon_B dx = s \quad (5)$$

将式 (4) 代入式 (5), 并积分可得

$$\varepsilon_A = 2s / (L_2 + 2L_1) \quad (6)$$

由图 2 可知,

$$L_1 = (H - h) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right); \quad L_2 = D' \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (7)$$

其中

$$D' = 2 \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) D e^{\left(\pi \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \tan \varphi / 180^\circ \right)} \quad (8)$$

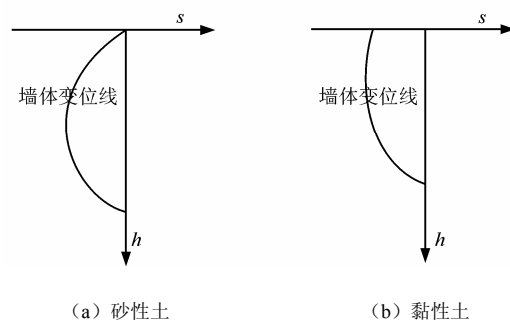
式 (3) 中的 ε_x 指的就是桩侧土体的应变 ε_A 。联立式 (3) 和式 (6) 可得

$$s = \frac{(2H - 2h + D') (k_0 \sigma_z - \sigma_x) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{2EL_a} \quad (9)$$

式中: σ_z 为土体有效自重应力 γh ; φ 为土体内摩擦角; D 为围护桩坑底插入深度; D' 、 H 、 h 物理意义见图 2。土体达到主动极限平衡状态时, σ_x 即为朗肯主动土压力 σ_a , 水平位移随土层深度的变化规律表达式为

$$s = \frac{\gamma \sqrt{k_a} (k_0 - k_a)}{EL_a} \left[\left(\frac{2H + D'}{2} - \frac{2c \sqrt{k_a}}{\gamma (k_0 - k_a)} \right) h - h^2 + \frac{c \sqrt{k_a} (2H + D')}{\gamma (k_0 - k_a)} \right] \quad (10)$$

式中: γ 为土体有效重度; k_0 、 k_a 为朗肯静止和主动土压力系数; c 为土体黏聚力。从式 (10) 可以看出, 达到朗肯主动极限平衡状态时, 墙后土体的极限水平位移的形状为 2 次抛物曲线。大致形状如下: 无黏性土如图 3 (a) 所示, 黏性土如图 3 (b) 所示。



(a) 砂性土

(b) 黏性土

图 3 主动极限位移示意图

Fig.3 Sketch of active limiting displacement

主动极限位移的变化规律与文献^[3]中通过监测数据拟合的围护墙侧向变形曲线相一致。

4 考虑位移影响的土压力计算公式

土压力计算涉及的因素较多,其大小不仅取决于最终应力水平与应力状态,且也与前期的应力历史与应力路径以及位移有着密切的关系^[7]。由前所述,一般支护结构位移很小,土体很难达到朗肯极限平衡状态,在土压力计算中位移的影响起着重要的作用。

4.1 位移对土压力的影响

土压力可以分为 3 类,即静止土压力、主动土压力和被动土压力,三者与墙体位移的关系如图 4 所示。

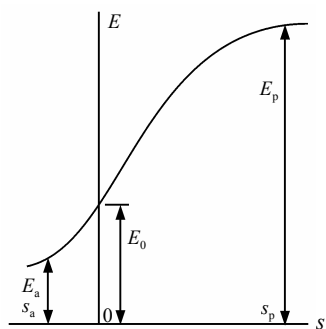


图 4 土压力与位移的关系曲线

Fig.4 Curves of earth pressure and displacement

如果将不同土层土压力(系数)与位移的关系画在同一坐标内,不难发现正常固结土的土压力与位移有关^[6]。尽管尚未能准确地确定土压力(系数)与位移间的定量关系,但对一般土体来说,在小变形范围内,土压力与位移间基本呈线性关系已是不争的认识。文献[8]通过离心模型试验得出水平土压力随墙体位移的变化曲线同样显示,在位移小于 $0.003H$ 时,呈直线变化。

4.2 小变位土压力计算公式

对正常固结土,其土压力必随位移而消长。观察土压力与变位的关系,以无变位处为起点,则有

$$\Delta p = \sigma_0 - \sigma_x = k_i s \quad (11)$$

式中: k_i 为土体水平基床系数。

式(11)符合土压力与位移之间的线性关系,这里以主动状态为例进行分析。在围护结构的位移较小时,图 2 中的 A 区还没有达到塑性平衡状态,则 $L_1 = 0$ 。由式(4)和式(5)可得

$$\varepsilon_A = 2s / (H + D' - h) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (12)$$

主动区的初始水平切线模量^[9]为

$$E_i = \frac{(H + D' - h) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{2} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_x}{s} \right)_{s \rightarrow 0} \quad (13)$$

式中: $k_i = \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_x}{\varepsilon_A} \right)_{\varepsilon_A \rightarrow 0}$, 即

$$k_i = \frac{2E_i}{(H + D' - h) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (14)$$

由式(11)和式(14)可得

$$\sigma_0 - \sigma_x = \frac{2sE_i}{(H + D' - h) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (15)$$

由式(15)整理可得

$$\sigma_x = k_0 \gamma_i h_i - \frac{2sE_i}{(H + D' - h_i) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2}\right)} \quad (16)$$

即考虑小变位主动土压力计算公式。其中, h_i 为土层厚度; γ_i 为土层的有效重度,这里的 E_i 为土体在侧向卸载条件下的初始切线弹性模量,也可以近似认为是土体的水平变形模量。一般地质勘察报告中都不提供该参数,可以通过以下两种算法求得:

(1) 公式法

该法通过室内试验或原位测试确定的是土体竖向变形模量,假设土体的应力-应变关系近似符合弹性理论公式,则可得

$$E_i = \nu_0 E_0 \quad (17)$$

式中: ν_0 为泊松比; E_0 为土体竖向变形模量。一般土的泊松比变化范围为 $0.25 \sim 0.6$, 根据当地经验确定,黏性土取大值,砂性土取小值。

土体常规三轴试验是保持 σ_3 不变的情况下,加减小轴应力 $\sigma_1 - \sigma_3$,而支护结构墙后土体的应力变化则相当于保持 σ_1 不变的情况下,加减小轴应力 σ_3 的三轴试验。对常规三轴试验而言, $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 曲线的初始切线斜率(初始切线模量) E_i 随 σ_3 变化^[10]。如果在对数纸上点绘 $\lg(E_i / p')$ 和 $\lg(\sigma_3 / p')$ 的关系,则近似地为一曲线。这里 p' 为大气压力。设直线的截距为 m , 斜率为 n , 于是有

$$E_i = kp'(\sigma_3 / p') \quad (18)$$

式中: $k = 10^m$ 。假设支护结构墙后土体的应力变化也符合此规律,则可得

$$E_i = kp'(\sigma_1 / p') \quad (19)$$

这里 $\sigma_1 = \gamma h$ 。

(2) 原位测试法

在原位测试技术中旁压试验和扁铲试验均能较好的测出土体的水平变形模量 $E_t = E_m$ ，其中 E_m 为旁压模量。

由上述方法求出 E_t 后，由式 (16) 即可求出土压力值，若得出负值，则取 0 即可。

S 的取值问题。本文的土压力计算模式，是在小变位的条件下求得的。所以这里的 S 对砂性土可取 $0.002H$ ，黏性土可取 $0.003H$ 。对于深基坑支护结构，在控制变形的条件下可以根据所控制的位移量进行求解土压力。也可在施工具体过程中根据实测数据求得当时土压力值，指导下一步的施工。

5 结 论

(1) 朗肯土压力理论在计算支护结构土压力时，由于公式简单实用，得到了广泛的应用。但其理论前提和假设至少部分是不适用的，而且在软土地层的计算中出现了悖谬之处，朗肯土压力理论的应用受到了限制。

(2) 在朗肯主动极限平衡状态条件下，推求了土体主动极限水平位移的变化规律符合 2 次抛物曲线。

(3) 在支护结构发生既定位移时，土压力的变化既与位移大小有关，又与其他因素有关。由于土性的复杂，具体体现这一原则的表达式很难找到。本文在小变位的情况下提出了一种简单的计算主动土压力公式。该公式考虑了基坑支护结构的位移、开挖深度和嵌固深度的影响，可根据基坑开挖具体施工工况求出相应的土压力，并指导下一步施工。

(4) 由于缺乏试验数据，本文未能对计算公式进行验证，另外对于小变位具体数值的划分现在还不是很明确和统一，有待于进一步验证和完善。

参 考 文 献

- [1] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算手册[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2005.
- [2] CASPE M S. Surface settlement adjacent to braced open cuts[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation*, 1966, 92(SM4): 51—59.
- [3] 刘兴旺, 益德清, 施祖元. 基坑开挖地表沉陷理论分析[J]. *土木工程学报*, 2000, 33(4): 51—55.
LIU Xing-wang, YI De-qing, SHI Zu-yuan. Theoretical analysis of surface settlement during excavation[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2000, 33(4): 51—55.
- [4] 杨斌, 胡立强. 挡土结构侧土压力与水平位移关系的试验研究[J]. *建筑科学*, 2000, 16(2): 14—20.
YANG Bin, HU Li-qiang. Test study on relationship between lateral earth pressure acting on retaining structures and horizontal displacement[J]. *Building Science*, 2000, 16(2): 14—20.
- [5] 梅国雄, 宰金珉. 考虑变形的朗肯土压力模型[J]. *岩石力学与工程学报*, 2001, 20(6): 851—854.
MEI Guo-xiong, ZAI Jin-min. Rankine earth pressure model considering deformation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2001, 20(6): 851—854.
- [6] 陈书中. 经典土压力理论的局限与小变位土压力计算的建议[J]. *土工基础*, 1997, 11(2): 15—21.
CHEN Shu-shen. The limitations of classical earth pressure theory and proposal for small wall displacement earth pressure calculation[J]. *Soil Engineering and Foundation*, 1997, 11(12): 15—21.
- [7] 施建勇, 雷国辉, 艾英钵, 等. 土压力变化规律的应力路径三轴试验研究[J]. *岩土力学*, 2005, 26(11): 1 700—1 704.
SHI Jian-yong, LEI Guo-hui, AI Ying-bo, et al. Stress path controlled triaxial experimental study of lateral earth pressure behaviour[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(11): 1 700—1 704.
- [8] 岳祖润, 彭胤宗, 张师德. 压实黏性填土挡土墙土压力离心模型试验[J]. *岩土工程学报*, 1992, 14(6): 90—96.
YUE Zu-run, PENG Yin-zong, ZHANG Shi-de. Centrifuge model tests on lateral pressure on walls retaining compacted clayey Backfill[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1992, 14(6): 90—96.
- [9] 张文慧, 田军, 王保田, 等. 基坑围护结构上的土压力与土体位移关系分析[J]. *河海大学学报(自然科学版)*, 2005, 33(5): 575—579.
ZHANG Wen-hui, TIAN Jun, WANG Bao-tian, et al. Relationship between earth pressure on support structure of foundation pits and displacement of earth mass[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2005, 33(5): 575—579.
- [10] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算(第二版)[M]. 北京: 中国水利电力出版社, 1996.